

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελίδα 106 σχολικού βιβλίου

A2. Ορισμός σελίδα 95 σχολικού βιβλίου

A3. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{|x|}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{|x|} = 1, \text{ όμως το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ δεν υπάρχει αφού}$$

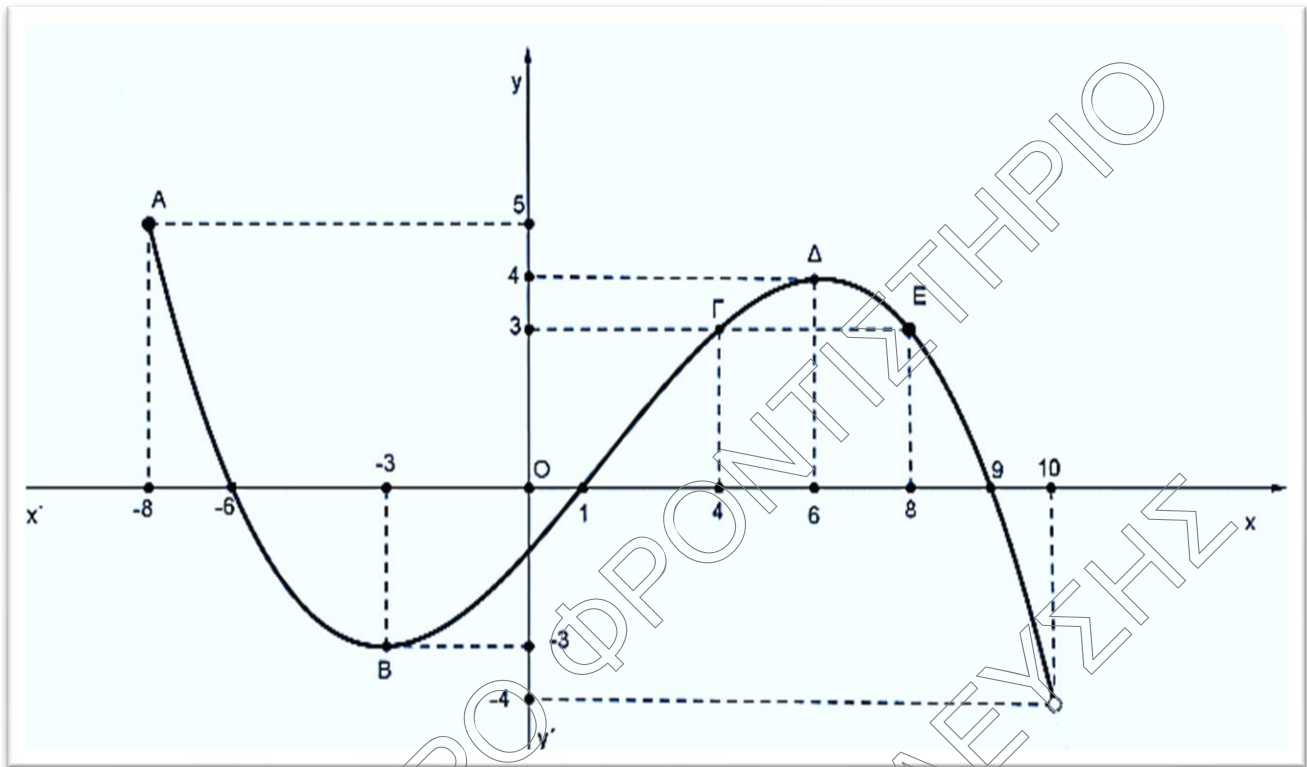
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

A4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A = [-8, 10)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = [-8, -3]$, γνησίως αύξουσα στο



διάστημα $A_2 = [-3, 6]$ ενώ στο διάστημα $A_3 = [6, 10)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Η f συνεχής στο A και τα σύνολα τιμών της σε κάθε ένα από τα διαστήματα μονοτονίας της είναι :

$$f(A_1) = [f(-3), f(-8)] = [-3, 5]$$

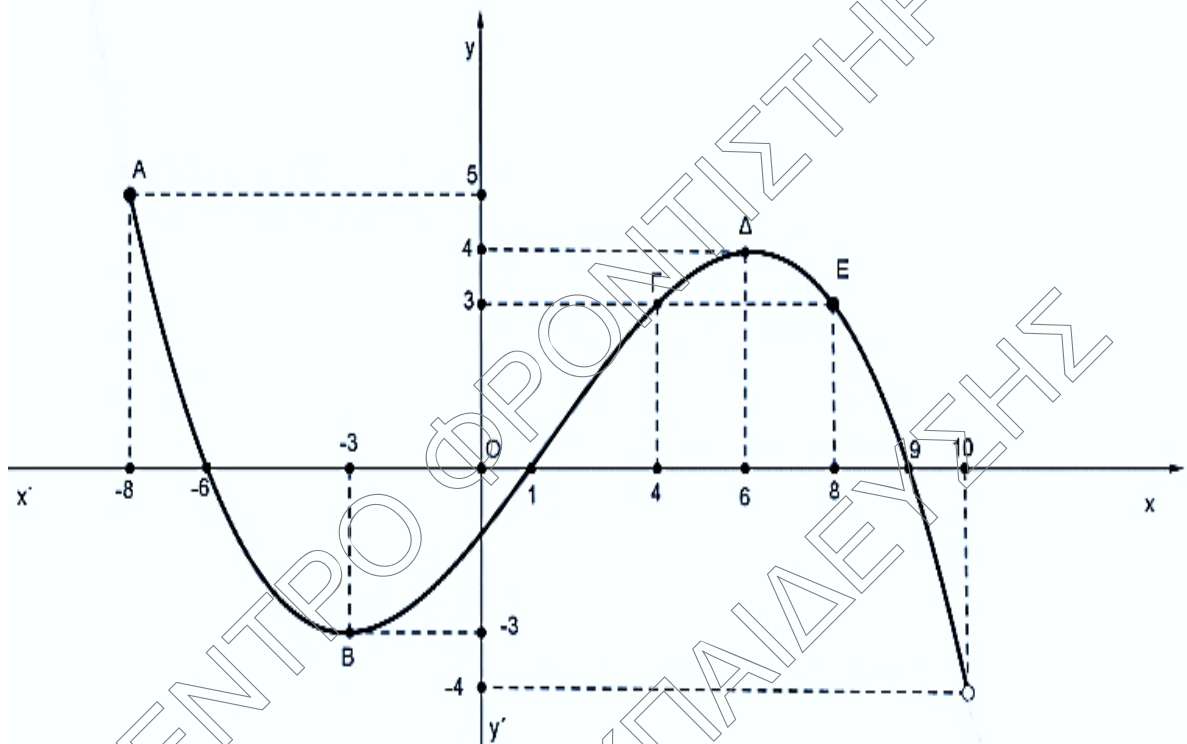
$$f(A_2) = [f(-3), f(6)] = [-3, 4]$$

$$f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow 10} f(x), f(6) \right] = (-4, 4]$$

B2.

(i) για τιμές του x κοντά στο 6 ισχύει $f(x) < 4$ άρα $f(x) - 4 < 0$ κοντά στο 6 και

$$\lim_{x \rightarrow 6} (f(x) - 4) = 0 \text{ επομένως } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x) - 4} = -\infty$$



(ii) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = 0$ όμως $f(x) > 0$ όταν $x \rightarrow 9^-$ άρα $\lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ενώ

$f(x) < 0$ όταν $x \rightarrow 9^+$ άρα $\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, άρα το $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

(iii) Θέτουμε $u = f(x)$ άρα $u_0 = \lim_{x \rightarrow 1} u = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ οπότε : $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = f(0) < 0$

,επίσης $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ και $x-1 > 0$ για $x < 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(f(x))}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[f(f(x)) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = f(0) \cdot (+\infty) = -\infty$$

- B3.** Η f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta = [4, 6]$ άρα το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta) = [f(4), f(6)] = [3, 4]$, Το $\pi \in f(\Delta)$ άρα υπάρχει $x_0 \in (4, 6)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \pi$, το x_0 μοναδικό διότι η f γνησίως αύξουσα στο Δ .

(Μπορούμε επίσης να κάνουμε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για την f στο $[4, 6]$ ή ακόμη και θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση $f(x) - \pi$ στο ίδιο διάστημα)

Ισχύει $4 < x_0 < 6 \Rightarrow 6 < x_0 + 2 < 8$, στο διάστημα $[6, 8]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(6) > f(x_0 + 2) > f(8) \Leftrightarrow 3 < f(x_0 + 2) < 4$

- B4.** Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται :

$$2021(f(x) - 2021) \cdot f(x) + 2021 = f(x) \Leftrightarrow 2021(f(x) - 2021)f(x) + 2021 - f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2021 \cdot f(x) \cdot (f(x) - 2021) - (f(x) - 2021) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - 2021)(2021f(x) - 1) = 0$$

Το 2021 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα $f(x) - 2021 \neq 0$ για κάθε $x \in A$ επομένως από την τελευταία εξίσωση έχουμε $f(x) = \frac{1}{2021}$ η οποία έχει τρεις ακριβώς ρίζες διότι:

- ο αριθμός $\frac{1}{2021}$ ανήκει στο $f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (-6, -3)$ τέτοιος ώστε

$$f(x_1) = \frac{1}{2021} \text{ το } x_1 \text{ μοναδικό διότι η } f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } A_1$$

- ο αριθμός $\frac{1}{2021}$ ανήκει στο $f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in A_2$ τέτοιος ώστε

$$f(x_2) = \frac{1}{2021} \text{ το } x_2 \text{ μοναδικό διότι η } f \text{ γνησίως αύξουσα στο } A_2$$

- ο αριθμός $\frac{1}{2021}$ ανήκει στο $f(A_3)$ άρα υπάρχει $x_3 \in A_3$ τέτοιος ώστε

$$f(x_3) = \frac{1}{2021} \text{ το } x_3 \text{ μοναδικό διότι η } f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } A_3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

(α) Το σημείο $A(1, f(1))$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = -2x + 5$

$$\text{άρα } f(1) = -2 \cdot 1 + 5 \Leftrightarrow f(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3 \quad (1)$$

Η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι το $f'(1)$

$$\text{οπότε } f'(1) = -2 \Leftrightarrow 2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του α στην (1) προκύπτει $\beta = 4$

$$\text{Άρα } f(x) = -x^2 + 4, x \geq 0$$

Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε:

$$x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Rightarrow -x_1^2 + 4 > -x_2^2 + 4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \text{ άρα η } f \text{ γνησίως}$$

φθίνουσα στο $A_f = [0, +\infty)$ και επειδή η f συνεχής στο A_f ως πολυωνυμική το

$$\text{σύνολο τιμών της είναι } f(A_f) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 4]$$

$$(β) \quad A_{g \circ h} = \left\{ \begin{array}{l} x \in A_h \\ h(x) \in A_g \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ -x + 4 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x \leq 4 \end{array} \right\} \text{ άρα } A_{g \circ h} = (-\infty, 4]$$

$$\text{και } (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \sqrt{-x + 4}$$

Γ2.

(α) Η f γνησίως μονότονη στο A_f άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Γνωρίζουμε ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} της f είναι το σύνολο τιμών της f επομένως για να βρούμε την αντίστροφη θα λύσουμε ως προς x την εξίσωση $f(x) = y$ με $x \geq 0$ και $y \leq 4$

$$f(x) = y \Leftrightarrow -x^2 + 4 = y \Leftrightarrow x^2 = 4 - y \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4 - y} \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{4 - y}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x} \text{ με } A_{f^{-1}} = (-\infty, 4]$$

$$\text{Όμως } (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \sqrt{-x + 4} \text{ με } A_{g \circ h} = (-\infty, 4]$$

Άρα $A_{f^{-1}} = A_{g \circ h} = A$ και $f^{-1}(x) = (g \circ h)(x)$ για κάθε $x \in A$ επομένως οι συναρτήσεις f^{-1} και $g \circ h$ είναι ίσες.

(β) Α-τρόπος

$$\text{Θέτουμε } u = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow u^2 = 4-x \Leftrightarrow x = 4-u^2 \text{ και } u_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^{-1}(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4-x} + x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (u + 4 - u^2) = -\infty$$

Β-τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^{-1}(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4-x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x} \right)} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \cdot \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}} + x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = (+\infty) \cdot (-1) = -\infty$$

Γ3.

(α) Έστω $M(x_1, f(x_1))$ τυχαίο σημείο της C_f , η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας

(ε) στο M είναι: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $B(0,8)$ άρα:

$$8 - f(x_1) = f'(x_1)(0 - x_1) \Leftrightarrow 8 - (-x_1^2 + 4) = -2x_1(-x_1)$$

$$\Leftrightarrow 8 + x_1^2 - 4 = 2x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

Επομένως $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 0 = -4(x - 2) \Leftrightarrow y = -4x + 8$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $q(x) = f(x) - f^{-1}(x)$ με $A_q = A_f \cap A_{f^{-1}} = [0, 4]$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $[1, 2]$ στο οποίο η q είναι συνεχής και επιπλέον $q(1) = f(1) - f^{-1}(1) = 3 - \sqrt{3} > 0$ ενώ $q(2) = -\sqrt{2} < 0$ δηλαδή $q(1) \cdot q(2) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $q(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - f^{-1}(x_0) = 0$, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} τέμνονται σε σημείο x_0 το οποίο ανήκει στο διάστημα

$(1, x_1)$, όπου $x_1 = 2$ η τετμημένη του σημείου επαφής της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) με την C_f

Γ4. Για το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\left((x^2 - 4)^2 + x - 4 \right) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{(f(x) - f^{-1}(x))} \right) \right]$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\left((x^2 - 4)^2 + x - 4 \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\left((x^2 - 4)^2 - (4 - x) \right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(f(x))^2 - (f^{-1}(x))^2 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(f(x) - f^{-1}(x)) \cdot (f(x) + f^{-1}(x)) \right] = 0 \cdot (f(x_0) + f^{-1}(x_0)) = 0 \end{aligned}$$

Για λόγους απλότητας θέτουμε $g(x) = \left((x^2 - 4)^2 + x - 4 \right)$ όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και

από το **Γ3 (β)** το όριο γράφεται : $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[g(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{q(x)} \right) \right]$ όπου

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = q(x_0) = 0$$

$$\left| g(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{q(x)} \right) \right| = |g(x)| \cdot \left| \eta\mu \left(\frac{1}{q(x)} \right) \right| \leq |q(x)| \cdot 1 = |q(x)| \text{ άρα}$$

$$-|q(x)| \leq g(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{q(x)} \right) \leq |q(x)| \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow x_0} |q(x)| = 0 \text{ άρα και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-|q(x)|) = 0 \text{ από κριτήριο παρεμβολής έχουμε : } \lim_{x \rightarrow x_0} \left[g(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{q(x)} \right) \right] = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τη σχέση $x^2 \cdot f^2(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x)$ για κάθε $x > 0$

προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = (x^2 \cdot f^2(x) - 1) \in \mathbb{R}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = k$

άρα : $x^2 \cdot f^2(x) = 1 + k$ για κάθε $x > 0$ άρα $f^2(x) = \frac{1+k}{x^2}$

Επομένως : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+k}{x^2} = 0$

Άρα ισχύει : $x^2 \cdot f^2(x) = 1$ για κάθε $x > 0$

$$x^2 \cdot f^2(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{1}{x}, \text{ αφού } x > 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \text{ αδύνατη.}$$

Η f συνεχής στο $A = (0, +\infty)$ και δε μηδενίζεται σε αυτό άρα διατηρεί πρόσημο.

$$\text{Άρα: } f(x) = \frac{1}{x}, x > 0 \text{ ή } f(x) = -\frac{1}{x}, x > 0$$

Όμως η f τέμνει την $y = x$ σε ένα μόνο σημείο.

$$\text{Αν } f(x) = -\frac{1}{x}, x > 0 \text{ τότε } -\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ αδύνατη επομένως } f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$\text{αφού η } \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (αφού } x > 0)$$

Δ2.

(α) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Ισχύουν: $f(1) = 1$ και $f'(1) = -1$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της f στο M είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Για τα σημεία που τέμνει η εφαπτομένη της f στο M τους άξονες έχουμε:

Για $y = 0$ παίρνουμε $x = 2$ ενώ για $x = 0$ παίρνουμε $y = 2$

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(2, 0)$ και τον $y'y$ στο σημείο $B(0, 2)$

(β) Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (1, 1)$ το οποίο ταυτίζεται με το σημείο M άρα M μέσο του AB

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με :

$$E = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot |x_A| \cdot |y_B| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ τ.μ}$$

Δ3.

(α) Η εξίσωση της διαγώνιού του τετραγώνου ΟΚΜΛ είναι η $y = x$, αφού τα σημεία $O(0,0)$ και $M(1,1)$ από τα οποία περνάει ανήκουν στην διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων που είναι η ευθεία την παραπάνω εξίσωση.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = x$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0,1]$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - x, x \in [0,1]$ η οποία είναι συνεχής.

Επιπλέον $h(0) = g(0) > 0$ και $h(1) = g(1) - 1 < 0$ δηλαδή $h(0) \cdot h(1) < 0$

άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = x_0$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω σε κάθε περίπτωση η C_g τέμνει την $y = x$ σε σημείο του διαστήματος $(0,1)$, επίσης για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $g(x_1) > g(x_2)$, και $-x_1 > -x_2$ άρα $h(x_1) > h(x_2)$ δηλαδή η h γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ άρα το x_0 μοναδικό.

$$(β) \quad g(x^3) - g(x^2) \geq x^3 - x^2 \Leftrightarrow g(x^3) - x^3 \geq g(x^2) - x^2 \Leftrightarrow h(x^3) \geq h(x^2) \Leftrightarrow x^3 \leq x^2$$

$$x^3 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) \leq 0, \text{ η τελευταία ισχύει για κάθε } x \in [0,1]$$

Δ4. Θεωρούμε $q(x) = 4x^4 + 8x^3 - 1$ με $x \in [0, +\infty)$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Εστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^4 < x_2^4 \Rightarrow 4x_1^4 < 4x_2^4 \quad (1)$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow 8x_1^3 < 8x_2^3 \Rightarrow 8x_1^3 - 1 < 8x_2^3 - 1 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) παίρνουμε $q(x_1) < q(x_2)$ άρα η q γνησίως αύξουσα στο $\Delta = [0, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι

$$q(\Delta) = \left[q(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) \right) = [-1, +\infty), \text{ στο οποίο ανήκει το } 0 \text{ άρα υπάρχει } x_0 > 0$$

τέτοιο ώστε $q(x_0) = 0$, το x_0 μοναδικό αφού η q γνησίως αύξουσα.

Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ σημείο της C_f και $B(\beta, h(\beta))$ σημείο της C_h , οι εξισώσεις των εφαπτομένων ευθειών στα σημεία αυτά είναι :

$$(\varepsilon_1): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}(x - \alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\alpha^2}x + \frac{2}{\alpha}$$

$$(\varepsilon_2): y - h(\beta) = h'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y + \beta^2 + 1 = -2\beta(x - \beta) \Leftrightarrow y = -2\beta x + \beta^2 - 1$$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη θα πρέπει οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ να ταυτίζονται, αυτό συμβαίνει μόνο όταν το σύστημα έχει λύση

$$\begin{cases} -\frac{1}{\alpha^2} = -2\beta \\ \frac{2}{\alpha} = \beta^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} = 2\beta \\ \frac{2}{\alpha} = \beta^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2\alpha^2} \\ \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{4\alpha^4} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2\alpha^2} \\ 8\alpha^3 = 1 - 4\alpha^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2\alpha^2} \\ 4\alpha^4 + 8\alpha^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Όμως $4\alpha^4 + 8\alpha^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow q(\alpha) = 0 \Leftrightarrow q(\alpha) = q(x_0) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \alpha = x_0$ μοναδική θετική ρίζα άρα $\beta = \frac{1}{2x_0^2}$.